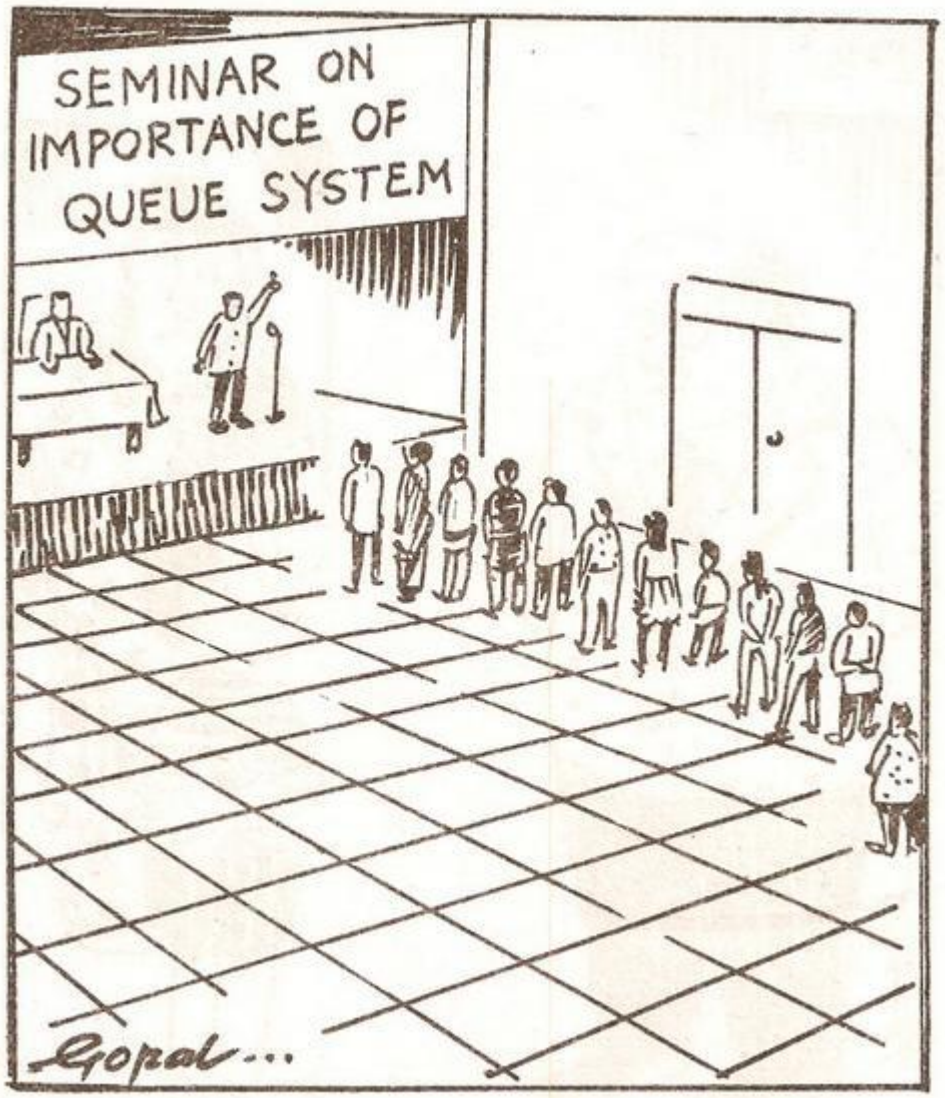
Modelización de Sistemas Biológicos

Simulación de Eventos Discretos

POLITÉCNICA

Eventos Discretos y Sistemas de Colas



Contenidos

1. Introducción:
   - Eventos discretos.
2. Modelado:
   - Modelado conceptual.
   - Modelado lógico.
3. Implementación y resolución:
   - Implementación clásica.
   - Implementación de modelos de tres fases.
   - Implementación con incrementos de tiempo.
4. Teoría de colas.

Simulación de Eventos Discretos

Introducción

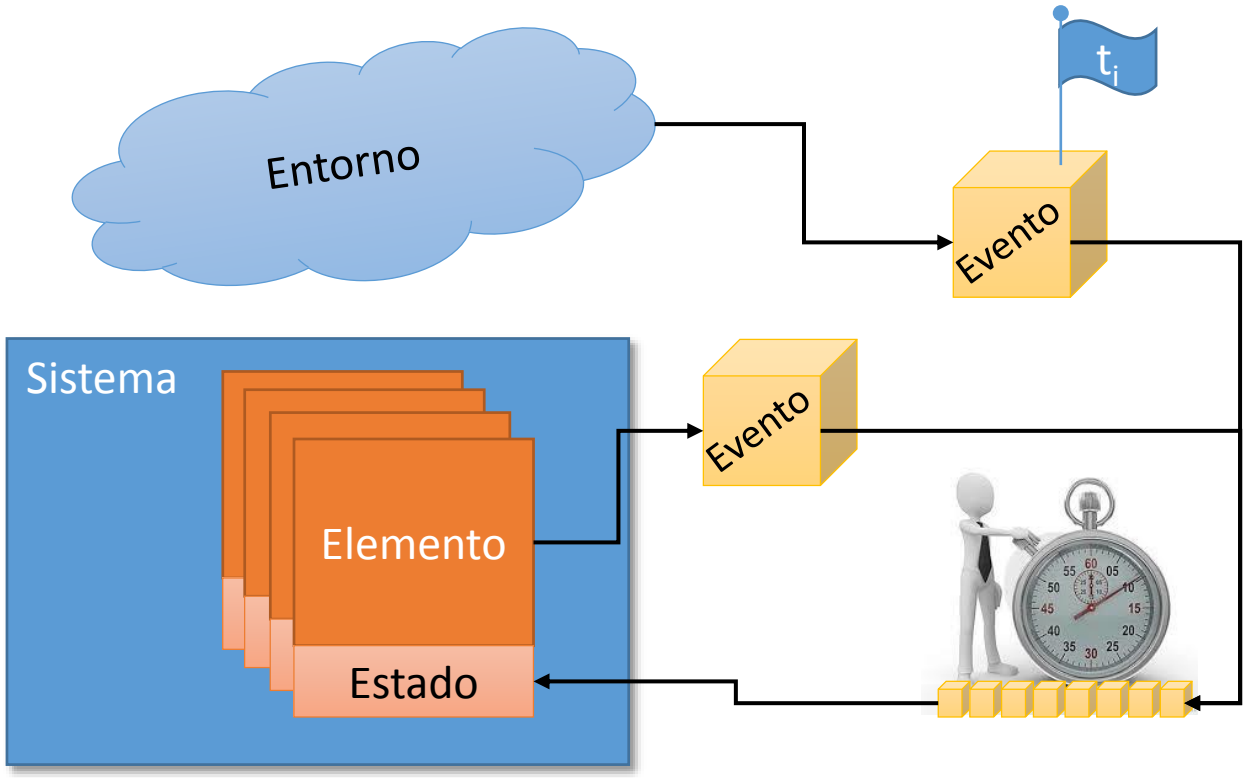
Un Poco de Historia

- Simulación de eventos discretos:
  - George Gordon / Myron H MacDougall (1980's): Modelos y lenguajes de simulación para eventos discretos.
  - Michael Pidd (1990's): Métodos de simulación de tres fases.
  - Paul Davidsson (2000's): Simulaciones multi-agente (entornos sociales y economía).

Simulación de Eventos Discretos

- Modelado de un sistema que evoluciona en el tiempo cuando:
  - El estado del sistema cambia (puede cambiar) únicamente en instantes concretos.
  - Estos cambios son instantáneos.
  - Los rangos de tiempo entre estos instantes el sistema (relativo a lo que es su estado) no ha cambiado.
- A estos instantes de tiempo se les denomina **eventos**:
  - **Definición (en teoría)**: Es el comienzo/final de una **actividad** con una duración en el tiempo en la cual se comprometen recursos del sistema para realizar determinadas operaciones.
  - **En la práctica**: La aplicación de la definición de evento es "*flexible*" y se tiene que adaptar a lo que sea cómodo a la hora de diseñar el modelo.

Simulación de Eventos Discretos



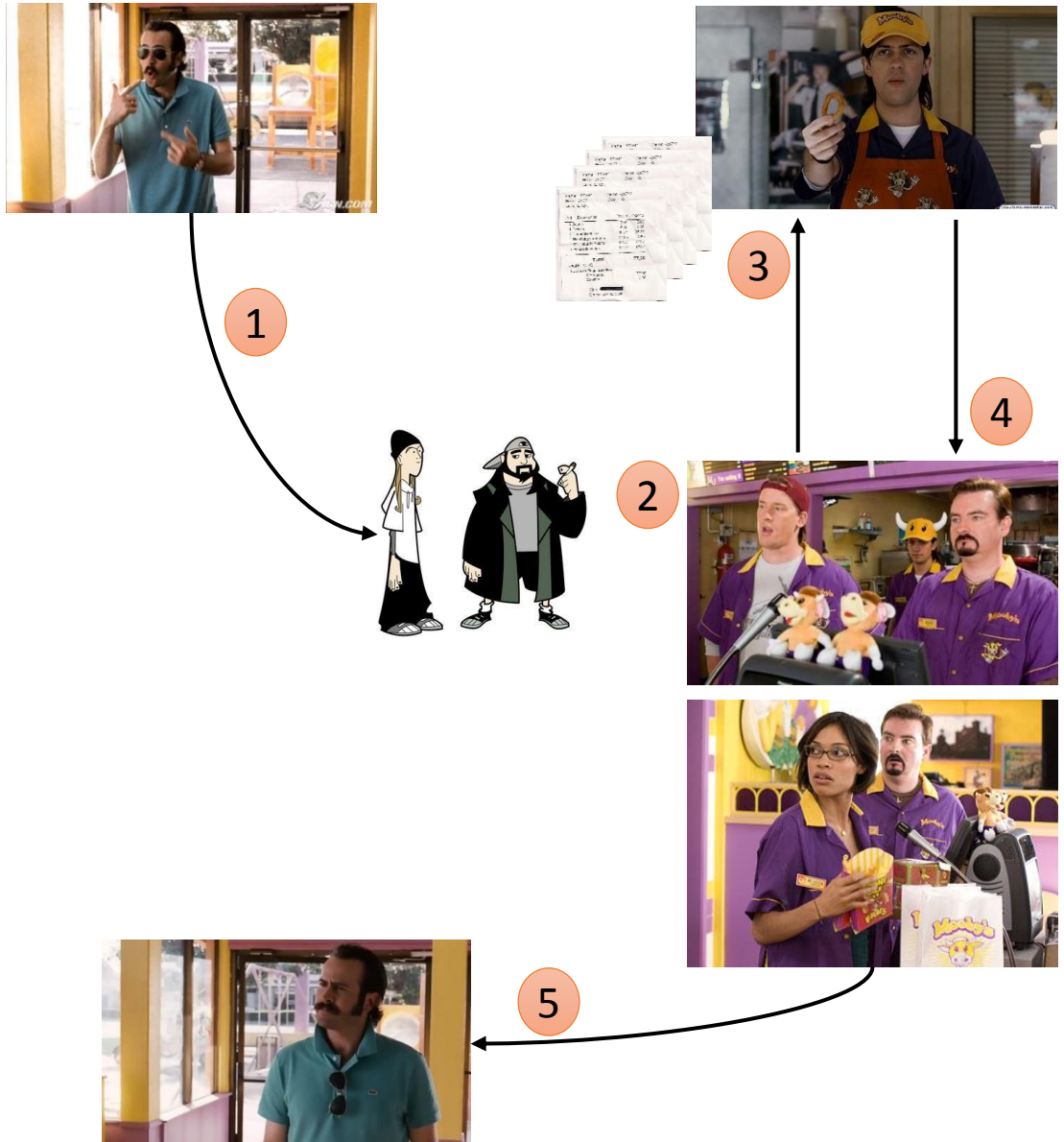
Si somos capaces de separar todo lo que ocurre en el sistema en:

- Instantes de **tiempo puntuales**…
- …en los cuales se producen cambios significativos en el **estado del sistema**…
- …y que son **generados** por los elementos del sistema o su propio entorno.

Es posible traducir el proceso la integración y cálculo diferencial de la simulación continua en **estudiar el sistema sólo en los momento de esos cambios**.

Ejemplo: McBurger

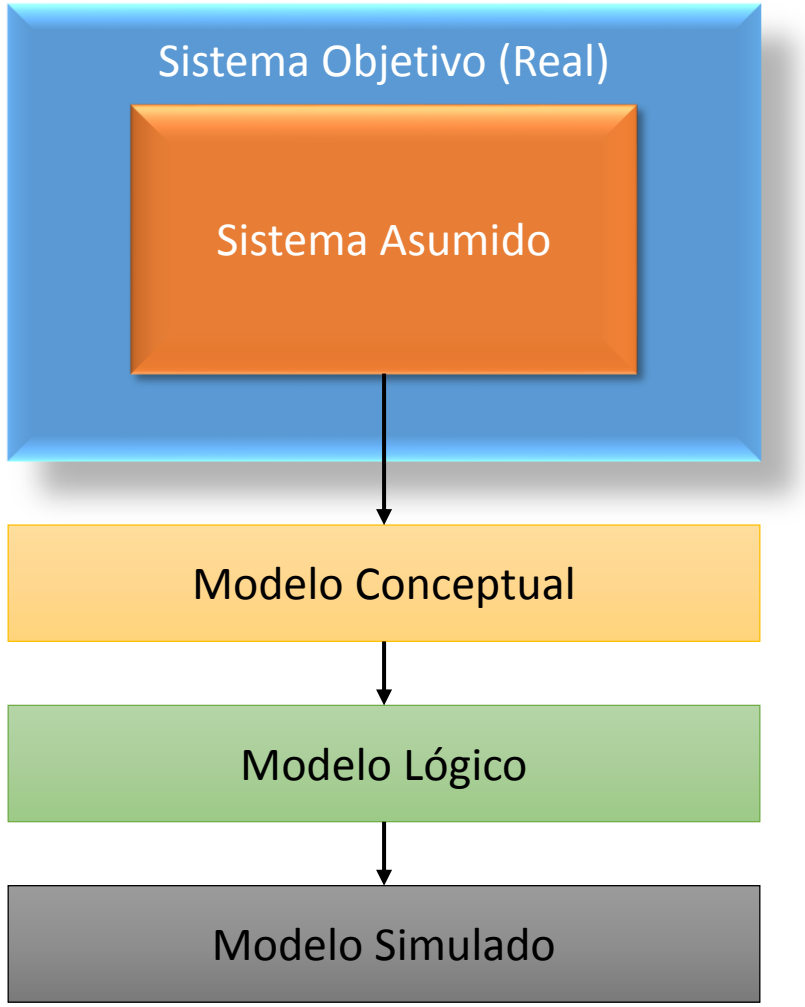
- Si modelizamos la atención de usuarios en una hamburguesería lo que tenemos son:
  1. Clientes que entran.
  2. Peticiones que se le hacen al empleado.
  3. Se pide la comanda a la cocina.
  4. Salen la comida de la cocina.
  5. Pago por parte del cliente.



Aplicaciones de la Simulación de Eventos Discretos

- Sistemas de colas: (La más habitual)
  - Servicios de atención: Manufactura, reparación, clínica, logística.
  - Sistemas de redes y conmutación.
  - Modelización del tráfico.
- Ciencias de la vida:
  - Biología de sistemas en *pathways* metabólicos.
  - Crecimiento celular.
  - Genética y análisis de fallos.
  - Estudios epidemiológicos.

Conceptualización de la Gestión de Eventos Discretos



Modelo Conceptual: Se realiza en tres pasos:

- Definición de elementos del sistema (entidades y recursos).
- Definición de conceptos derivados (atributos, eventos y actividades).
- Diseño de diagramas cíclicos de actividades.

Modelo Lógico: Aproximaciones de diseño y decisiones:

- Selección del paradigma de modelado.
- Selección del método para la discretización del tiempo.

Modelo Simulado: A este nivel se deben determinar los aspectos concretos para la resolución del modelo:

- Implementación del reloj de sistema.
- Métodos analíticos de apoyo (teoría de colas).

Simulación de Eventos Discretos

Modelo Conceptual

Conceptos

- **Entidades**: Elementos individuales del sistema cuyo comportamiento y evolución se traza a lo largo del sistema:
  - **Clase**: Grupos permanentes de entidades idénticas o similares en su comportamiento (e.g., los clientes).
  - **Conjuntos**: Grupos temporales de entidades cuyo estado actual es idéntico o similar (e.g., clientes esperando en la cola).
  - **Atributos**: Información interna de las entidades que las hacen diferentes dentro de una clase o conjunto y que influye en el comportamiento o proceso que se tiene que hacer con ellas (e.g., la comida que quiere pedir).
- **Recursos**: Elementos del sistema que son consumidos o generados en los procesos. De ellos se guarda un contador de cuántos hay (no se modelan individualmente) (e.g., el número de hamburguesas congeladas).

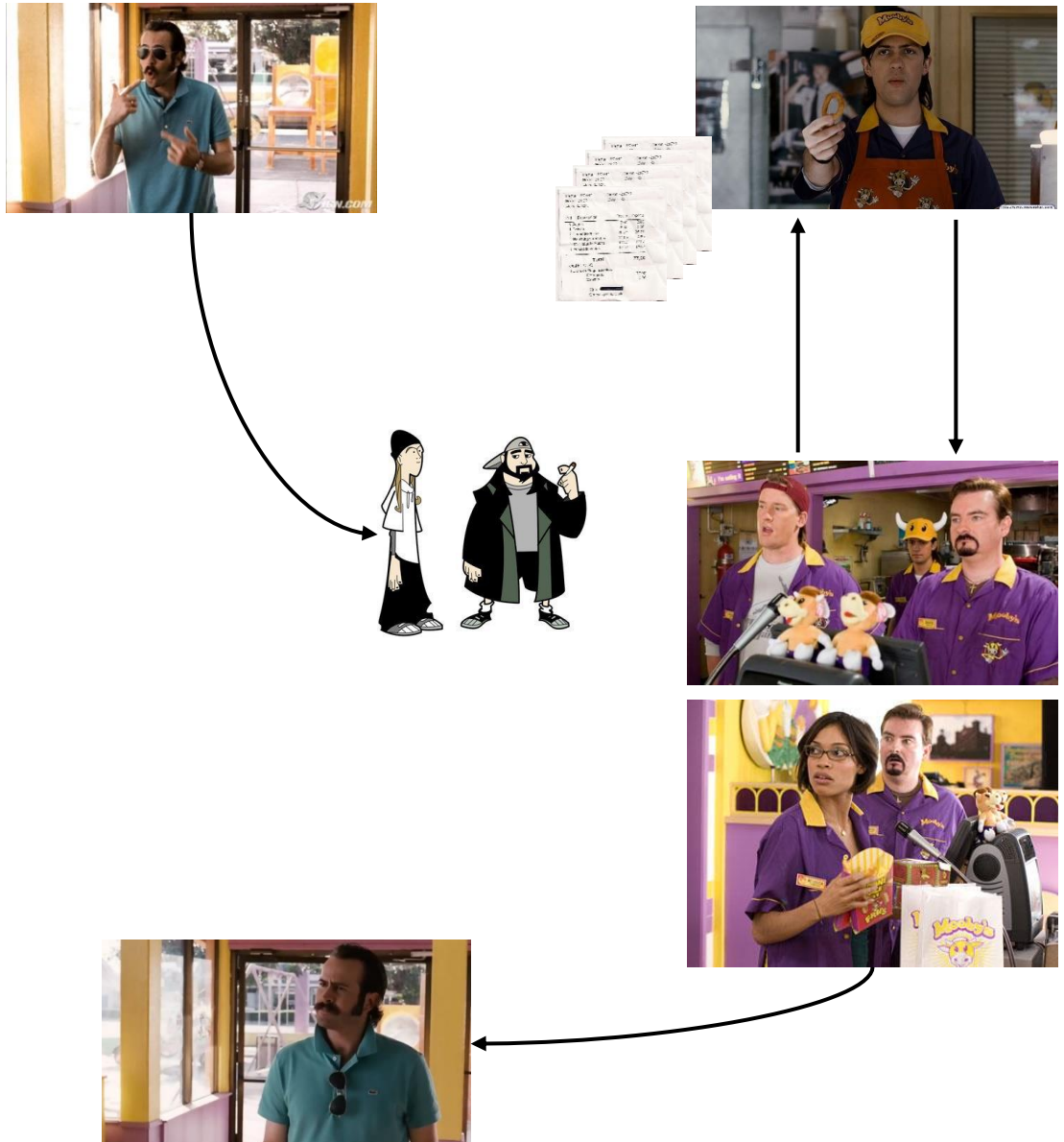
Ejemplo: McBurger

- Entidad (Bob) [Clase=Cliente]:

  - Llega en un instante determinado de tiempo.
  - Quiere hacer un pedido concreto.
  - Trae una cantidad de dinero.
- Entidad (Elias) [Clase=Cocinero]:

  - Habilidad para hacer hamburguesas.
- Recursos:

  - Hamburguesas congeladas.



Conceptos

- **Evento**: Cualquier suceso capaz de alterar el estado del sistema:
  - Pueden ser sucesos externos (generados por el entorno).
  - Pueden representar el comienzo y (sobre todo) el final de una actividad.
- **Actividad**: Proceso dentro del sistema:
  - Tiene duración determinada (comienza con un evento y termina con un evento).
  - Conlleva un cambio en el estado del sistema.
  - Se ve influido por los atributos de los elementos del sistema.
- **Estado del sistema**: Variables que definen cómo está el sistema en su conjunto y sus elementos particularmente:
  - Se ven modificadas por los eventos.
  - Influyen a su vez en la secuenciación (temporización) de los eventos.

Ejemplo: McBurger

Atributos (**Atr**):

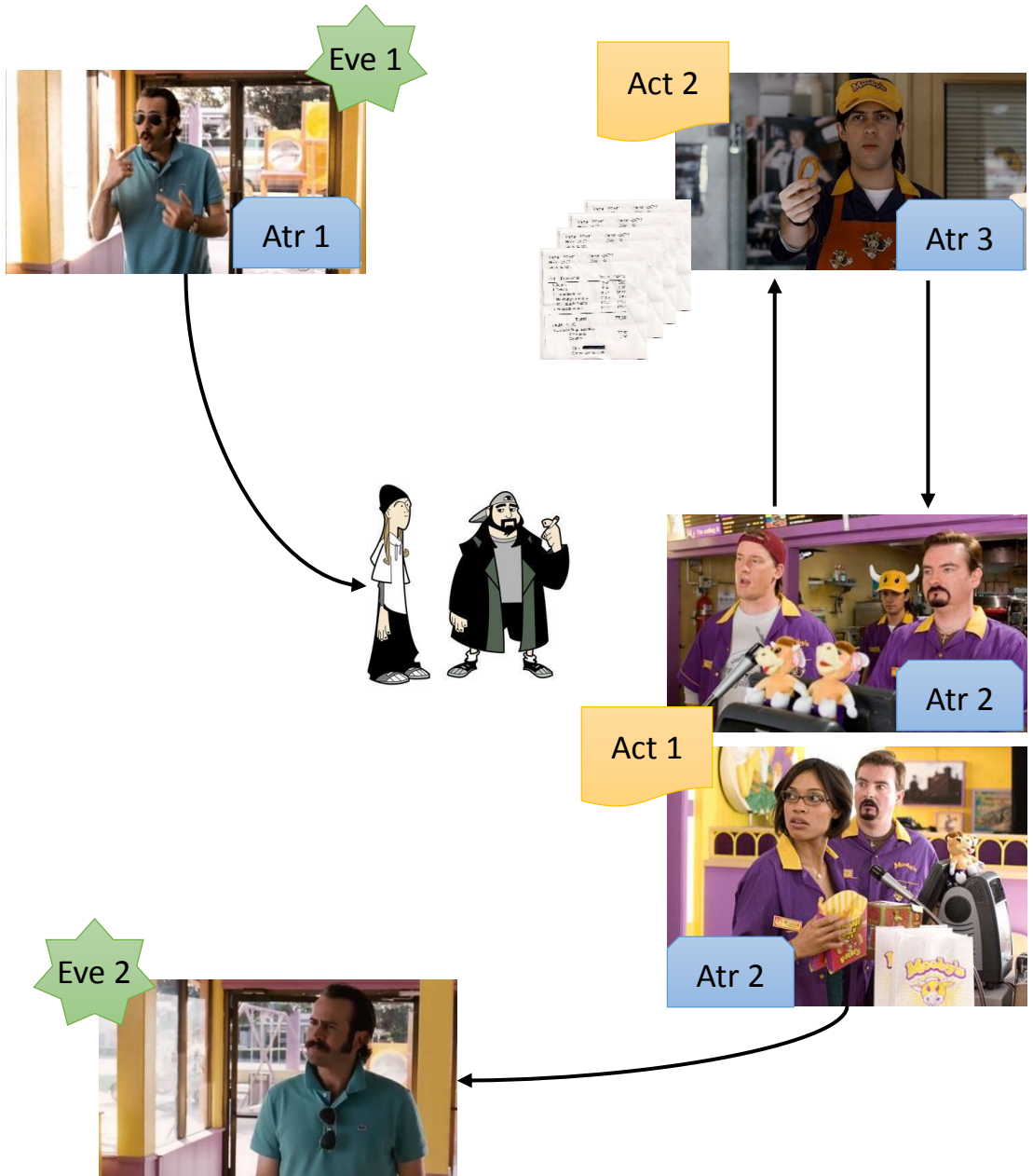
1. Del cliente: Servicio solicitado.
2. Del encargado: Su velocidad para atender al cliente.
3. Del cocinero: Su velocidad para preparar la comida.

Eventos (**Eve**):

1. Llegada de un cliente
2. Salida de un cliente.

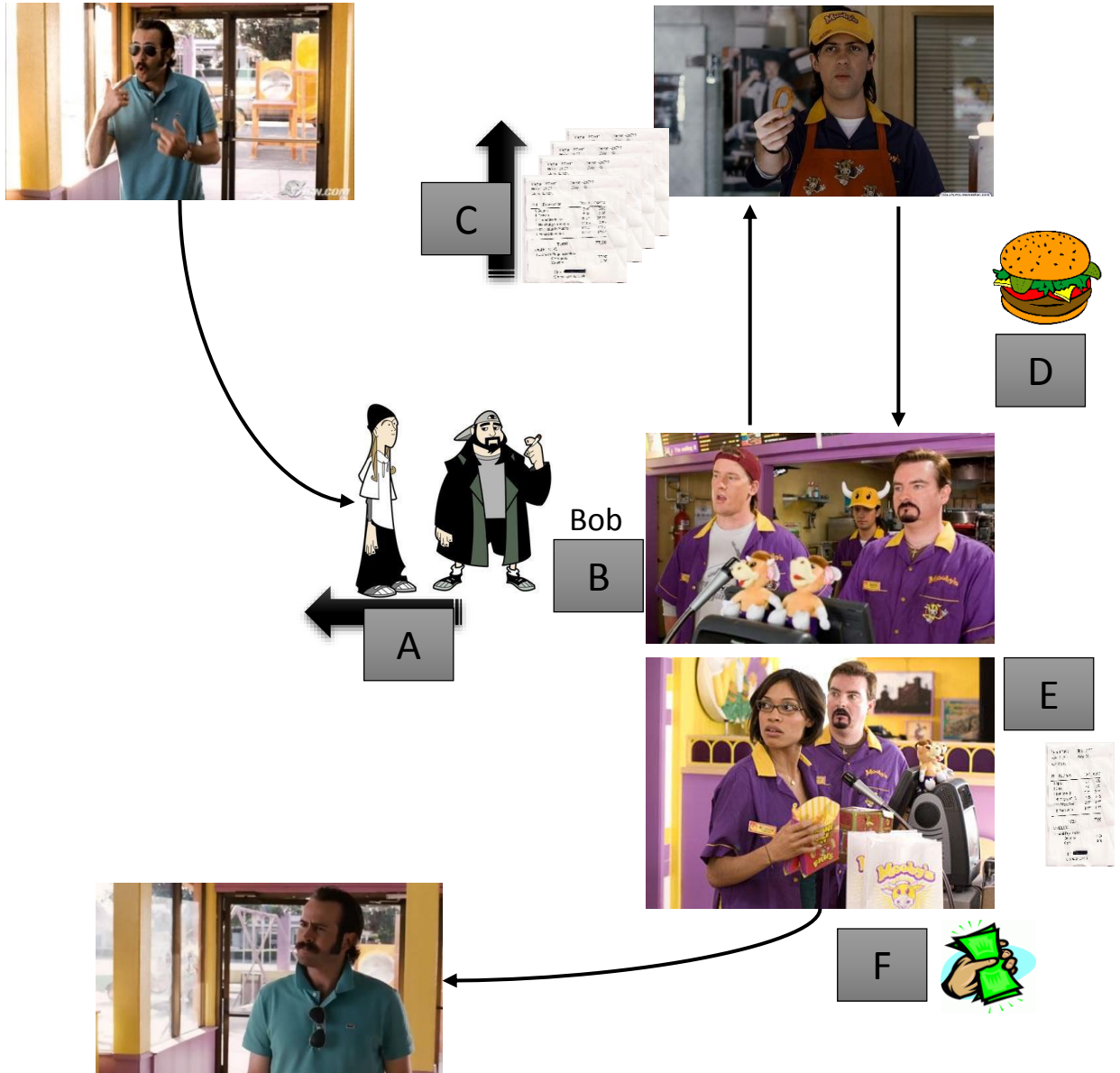
Actividades (**Act**):

1. Atender o esperar al cliente.
2. Preparar comida o esperar pedido.



Ejemplo: McBurger

- Estado del sistema:
  A. Número de clientes en la cola.
  B. Cliente haciendo el pedido.
  C. Número de comandas en cocina.
  D. Comanda en curso.
  E. Realización del pago.
  F. Pago por parte del cliente.

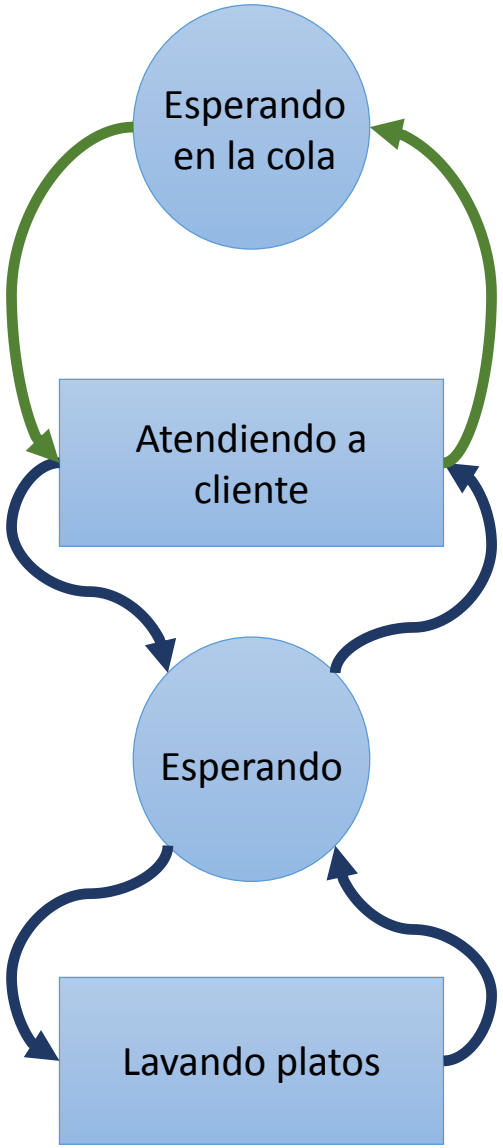


Modelado de Eventos Discretos

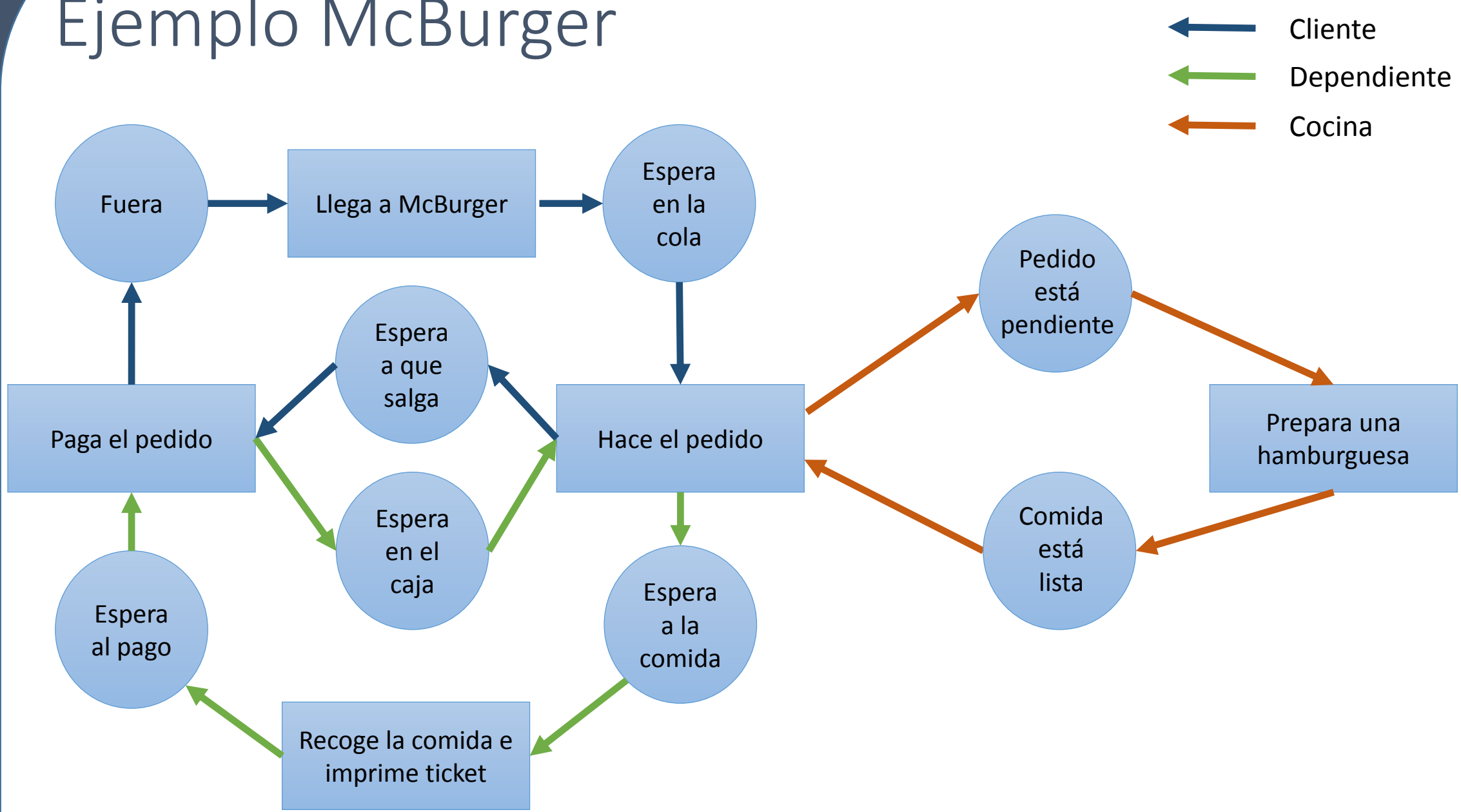
- Para las entidades del sistema se definen posibles estados:
  - Estados activos: Implican cooperación con diferentes tipos de entidades a lo largo de una duración determinada (extraída de alguna distribución de probabilidad):
    - Por lo general indican actividades.
  - Estados pasivos: No hay cooperación y la entidad espera a que ocu para salir de dicho estado.

Diagramas de Ciclos de Actividades

- Representación gráfica de las actividades:
  - Permite identificar tipos (clases) de entidades.
  - Y también actividades relevantes.
- Incluye:
  - Conectando estados activos y pasivos.
  - Puede haber varios grafos (uno por entidad del sistema).
  - Se pueden compartir estados entre entidades diferentes.



Ejemplo McBurger

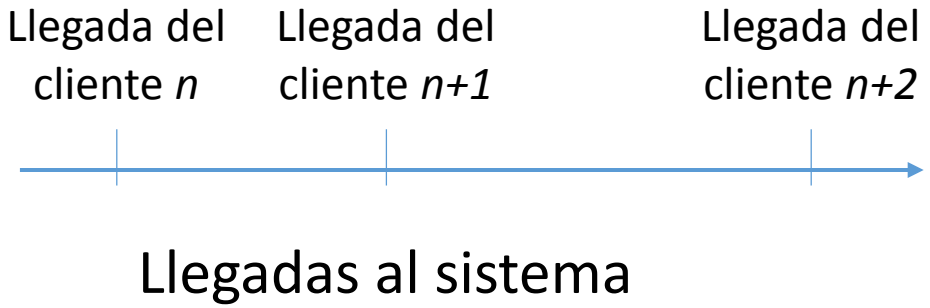


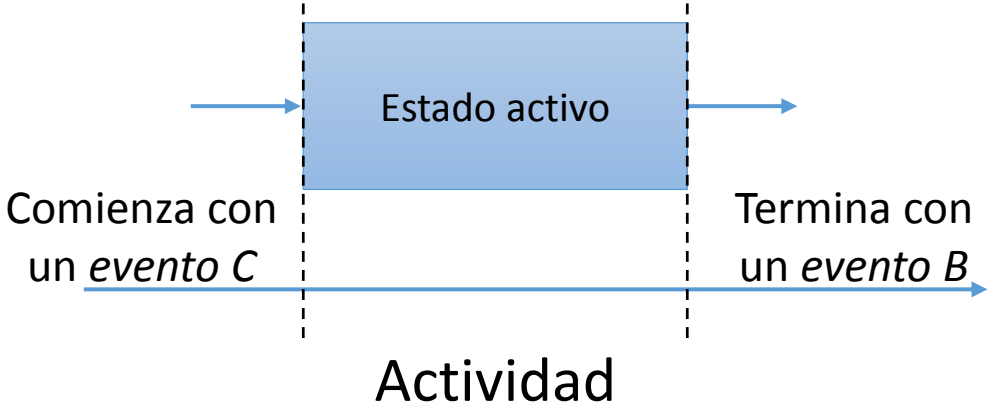
Ejercicio (Pidd, 1998)

- El dependiente de una taquilla de cine:
  - Tiene dos responsabilidades, la venta de entradas y responder a preguntas de los clientes.
  - La preguntas pueden venir por clientes que se acercan a la taquilla pero también pueden ser vía llamada telefónica.
  - El dependiente debe dar prioridad a los clientes que vienen a la taquilla.
  - Tanto los clientes de la taquilla como las llamadas esperan en una cola.
  - Se asume que los clientes que llaman por teléfono nunca cuelgan.

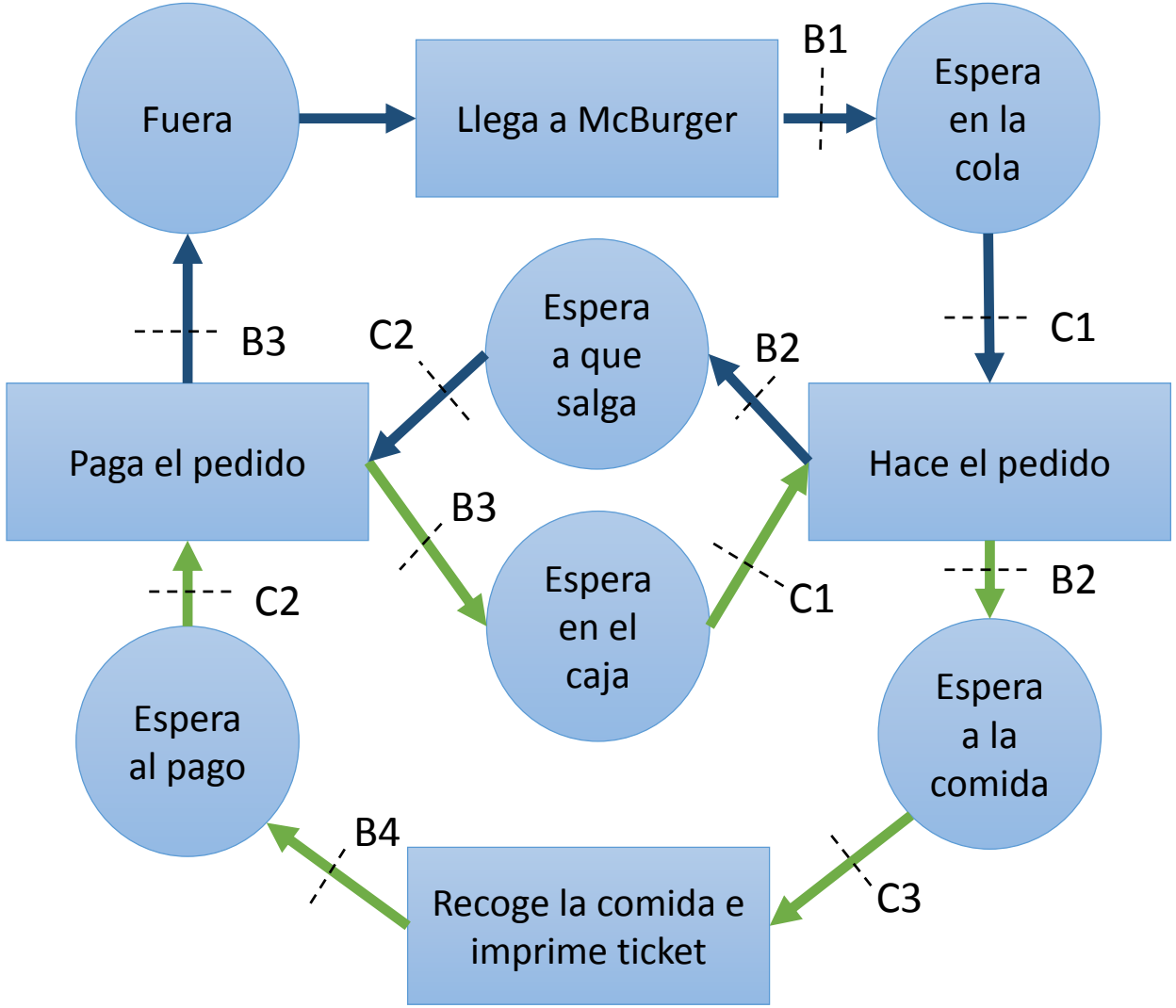
Modelos de Tres Fases

- Se dividen los eventos en dos tipos:
  - **<u>Eventos B (*Booked/Bound*)</u>**: La ejecución del evento y el consiguiente cambio de estado se planifica para un instante de tiempo concreto.
    - Los eventos de este tipos están asociados a llegadas al sistema o a finalización de actividades.
  - **<u>Eventos C (*Conditional*)</u>**: La ejecución del evento depende de condiciones del modelo (que se de una condición del estado del sistema que saque a una entidad del estado en el que está).
    - Los eventos de este estilo están asociados generalmente al comienzo de actividades.





Modelo de Tres Fases



- Eventos B:
  - B1: llega a McBurger.
  - B2: Termina de hacer el pedido.
  - B3: Termina de pagar el pedido.
  - B4: Termina de recoger la comida.
- Eventos C :
  - C1: Empieza a hacer el pedido.
  - C2: Empieza a pagar.
  - C3: Empieza a recoger la comida.

Simulación de Eventos Discretos

Modelo Lógico

Paradigmas de la Simulación de Eventos Discretos

El elemento central es…

Proceso	**Dirigida y orientada a procesos:** • Modelo de simulación de eventos discretos tradicional. • Los elementos (procesos) se encargan de etapas en el modelo de sistema.
Objeto	**Dirigida a procesos pero orientada a objetos:** • Los elementos (objetos) están definidos por clases. • Los elementos (objetos) siguen una ruta dentro del sistema.
Agente	**Dirigida a procesos y orientada a agentes:** • Los elementos (agentes) también están definidos por clases. • Los elementos (agentes) son objetos inteligentes (toman decisiones y tienen memoria).

Dirigido y Orientado a Procesos

- Solución tradicional.
- Eventos:
  - Se definen los eventos que ocurren en el sistema.
  - Se organizan en una jerarquía.
  - Hay eventos cuya ejecución implica el desbloqueo de elementos en espera (se implementaría directamente en el evento):
    - E.g., Cuando se ha cobrado ya a un cliente se pasa a atender al siguiente.
- Entidades:
  - Son estructuras de datos y contadores de recursos de ámbito global.
  - La ejecución de los eventos modifican valores de de las entidades o contadores de recursos.

Dirigido a Procesos y Orientado a Objetos

- Orientas a los modelos de tres fases.
- Eventos:
  - Se divide entre eventos B y C.
  - Los eventos B se gestionan mediante una cola de eventos ordenada por tiempo.
  - Los eventos C se asocian a una condición para que ocurran.
  - Los eventos no tienen rutinas sólo referencias a entidades participantes.
- Entidades:
  - El peso de la simulación corre de su cuenta.
  - Las rutinas de simulación se asocian a las entidades las cuales saben cuál es la actividad pendiente.
  - Las entidades gestionan su propio estado.

Dirigido a Procesos y Orientado a Agentes

- Similar a los modelos de objetos, pero las rutinas de actividades son más complejas:
  - Consideran diferentes factores del entorno/estado para genera una determinada salida.
  - Las siguientes acciones (actividades/eventos) no son fijos sino que depende de un proceso de decisión en el agente.

<u>Veremos en su momento las técnicas de simulación basadas en agentes.</u>

Conceptos

- **<u>Reloj de simulación</u>**: Variable que representa el instante de tiempo (simulado) en el que está el modelo:
  - Se debe representar en unidades de tiempo reales (segundo, horas, días).
  - Diferente del tiempo real que tarda la simulación:
    - *Simulation time* ←vs.→ *Wallclock time*

Mecanismos para gestionarlo:

- Avance de tiempo hasta el siguiente evento (el método habitual):
  - No se simulan los instantes de inactividad, se salta de evento a evento.
- Incremento de tiempo fijo:
  - Más parecido a la simulación de sistemas contínuos con un tiempo discretizado en tramos.
  - Introduce un error de modelado en términos de cuando los eventos deben ocurrir y realmente ocurren.

Avance del Tiempo de Simulación

- Avance de tiempo hasta el siguiente evento:
  - Se inicializa el reloj a 0 unidades.
  - Se determina los tiempos para que ocurran futuros eventos: **Cola de eventos** (ordenada por el tiempo en el que va a ocurrir).
  - El reloj avanza hasta el primer elemento de la cola:
    - Se saca el primer evento de la cola.
    - Se ejecuta el evento (cada evento tiene un código asociado).
    - La ejecución de un evento puede modificar la propia cola de eventos (encolado de nuevos eventos).
  - La simulación continua hasta que se da un criterio de parada (por lo general un evento determinado).

El reloj avanza de evento en evento (no existe tiempo en el que el sistema esté inactivo).
Al sistema no le interesa nada saber que ocurre entre dos eventos sucesivos.

Avance del Tiempo de Simulación

- Varios parámetros del sistema son variables aleatorias:
  - Tiempos de llegada entre clientes y tiempos de servicio.
- El sistema va creando eventos (e_j) desde el instante inicial (t_0) y atendiendo a la relación entre eventos:
  - Eventos que se producen después de que otro evento ha ocurrido.
  - Intervalos de tiempo entre eventos.

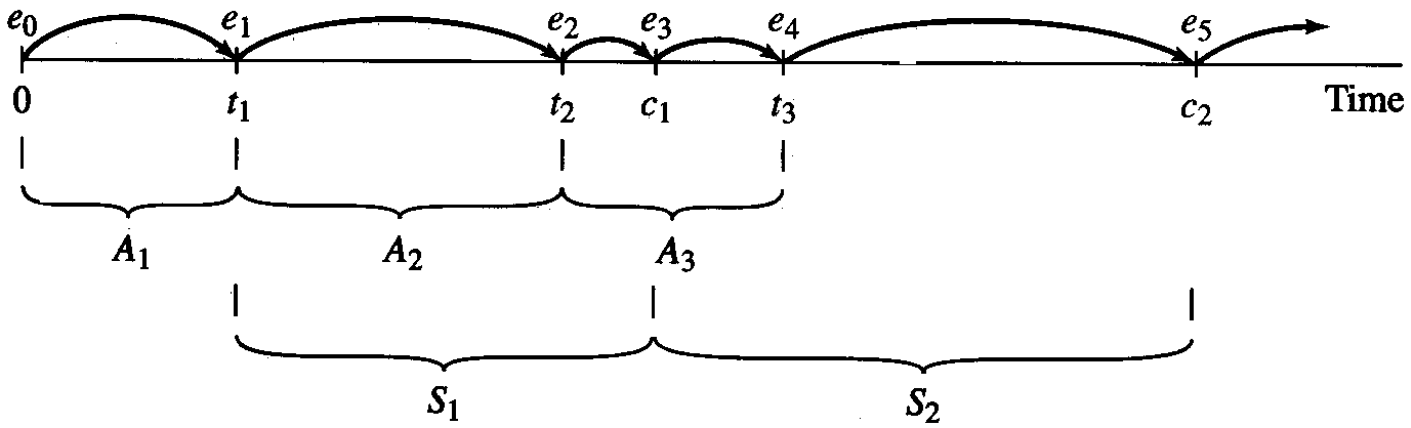
t_i: Tiempo de llegada del cliente i.

$A_i = t_i - t_{i-1}$: Intervalo entre clientes.

S_i : Tiempo de servicio.

D_i : Tiempo en cola del cliente i.

$c_i = t_i + D_i + S_i$: Tiempo de servicio para el cliente i.

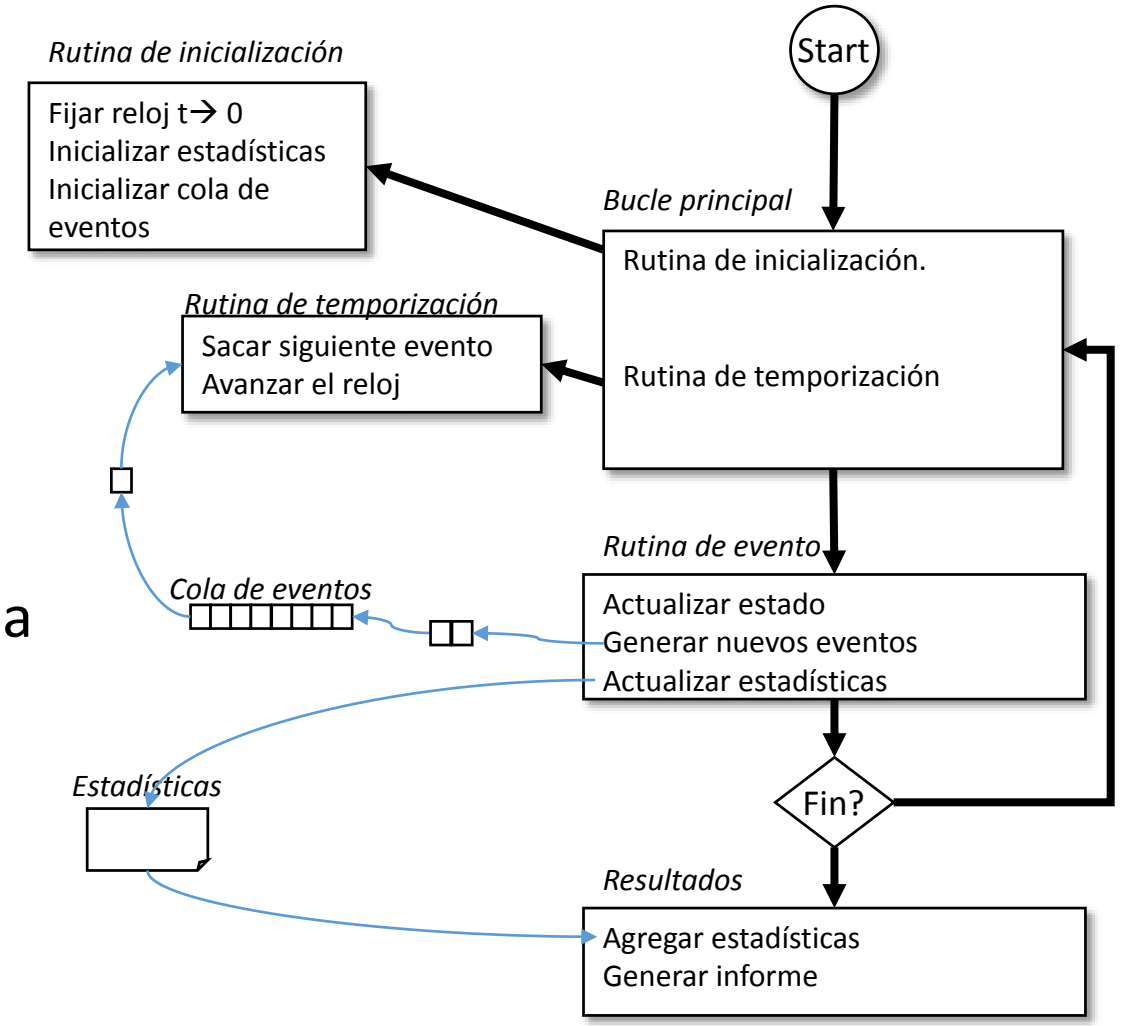


Simulación de Eventos Discretos

Resolución e Implementación

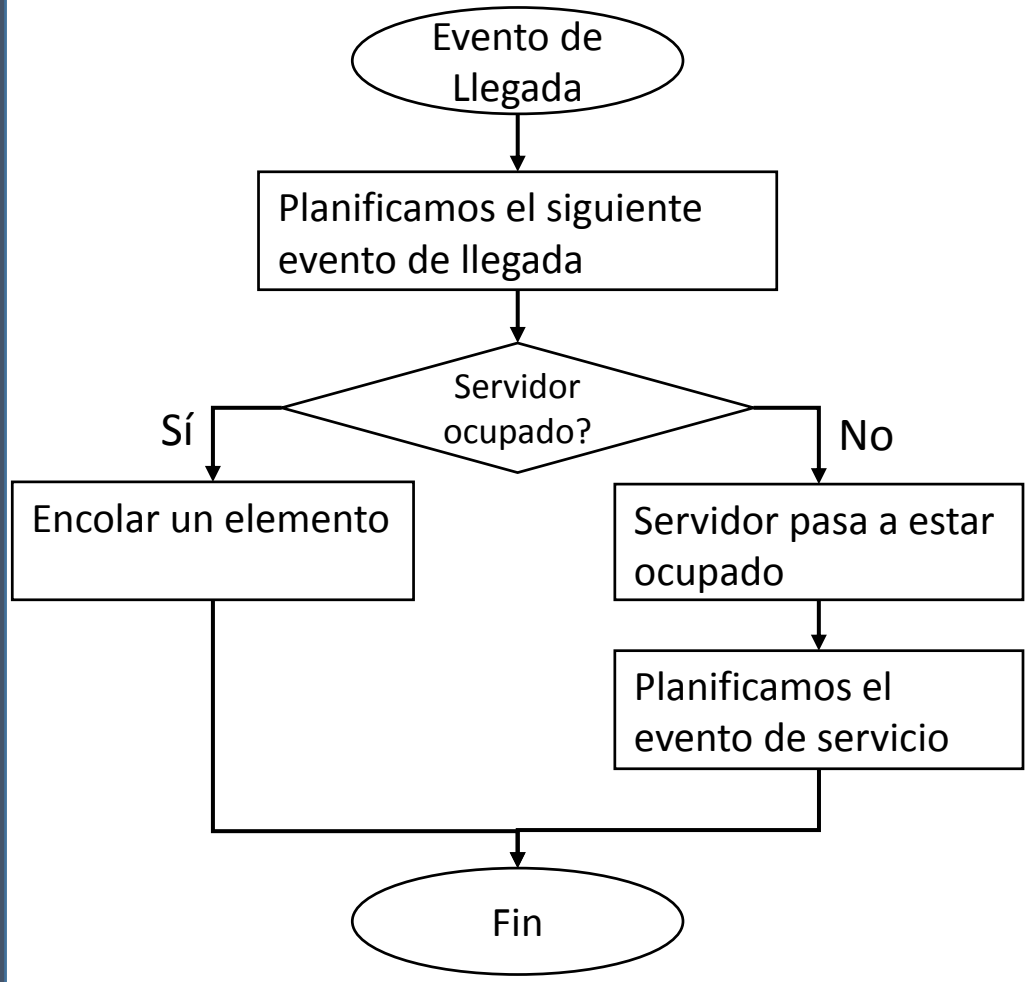
Implementación de una Simulación de Eventos Discretos General

- Tanto si se programa desde cero como si se usan lenguajes/herramientas, se centra en una serie de rutinas de control:
  - **Rutina de inicialización**: Estado del sistema en t_0.
  - **Rutina de temporización**: Consume la cola de eventos (extrae el siguiente evento y avanza el reloj).
  - **Jerarquía de eventos**: Se define la tipología de eventos, todos tiene un instante de ejecución y cada uno una **rutina de evento** específica o por familias.

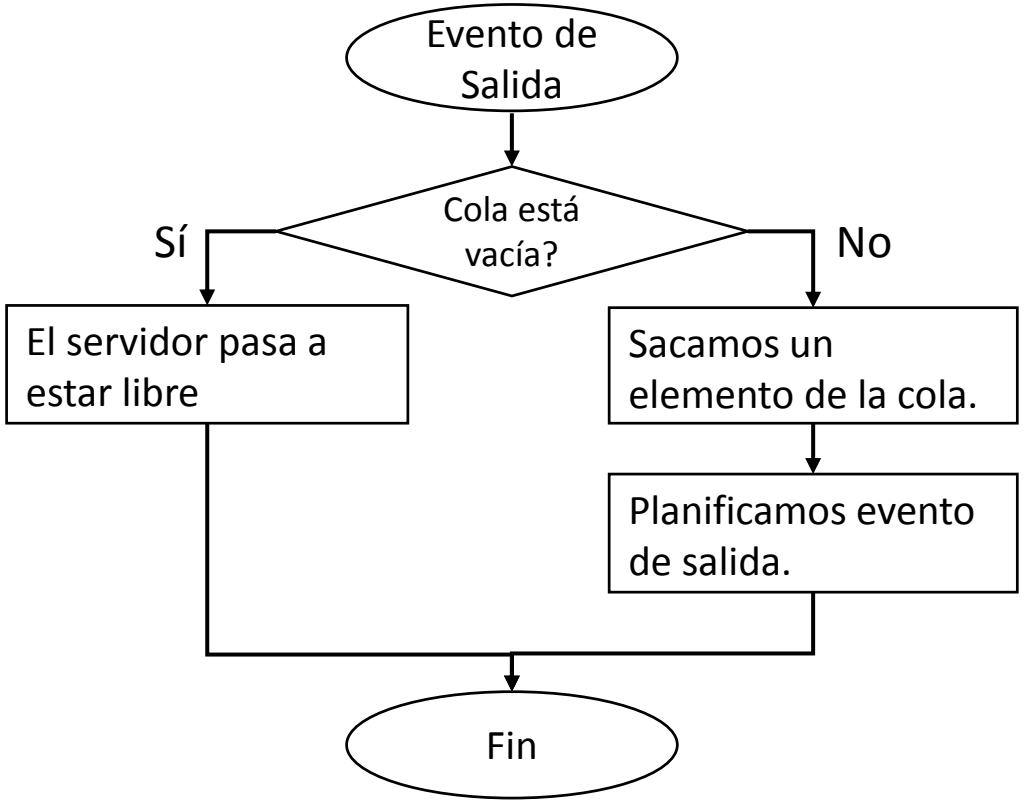


Implementación de una Simulación de Eventos Discretos General

Rutina de llegada (ejemplo)

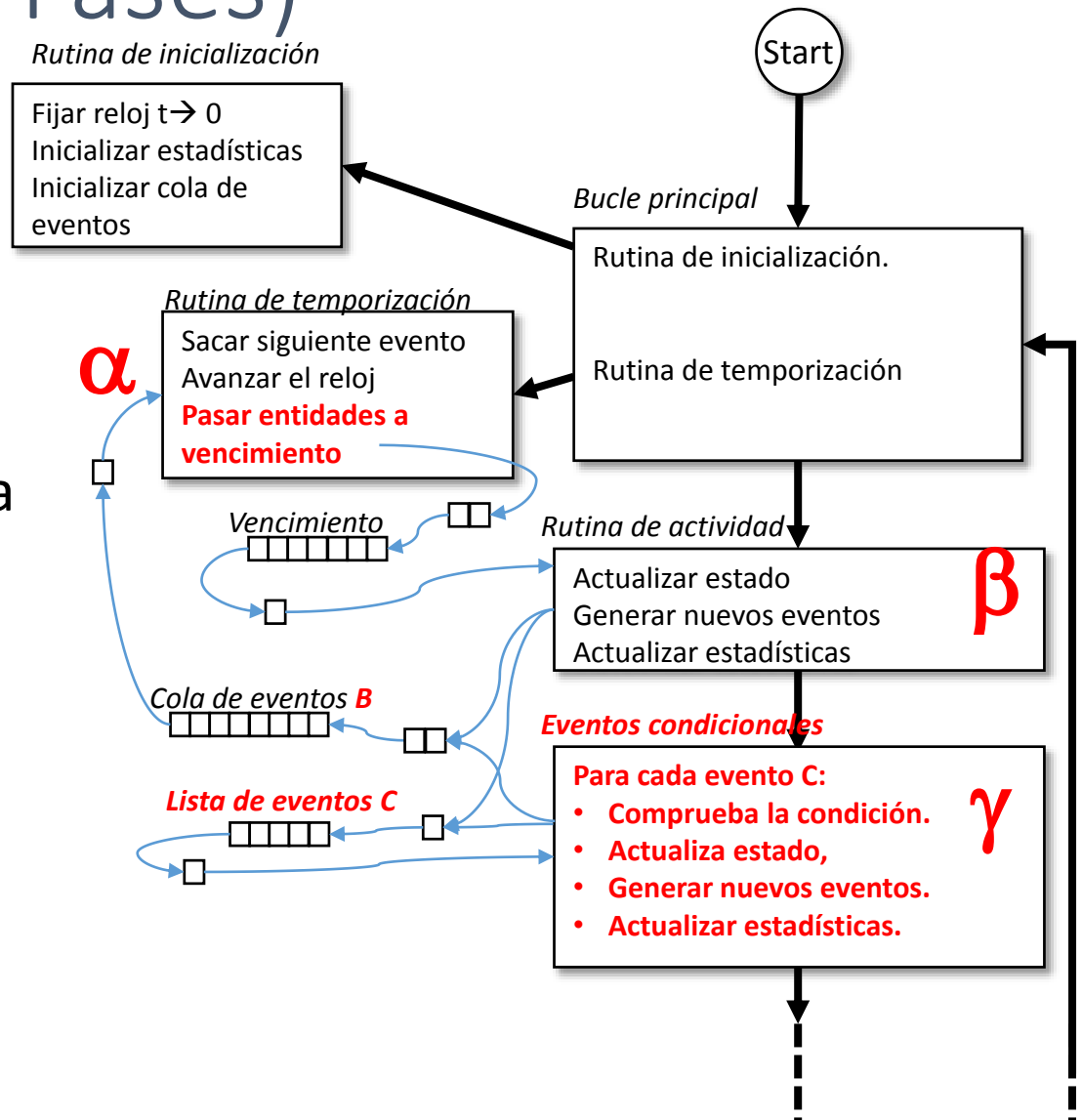


Rutina de servicio (ejemplo)



Implementación de una Simulación de Eventos Discretos (Modelo de Tres Fases)

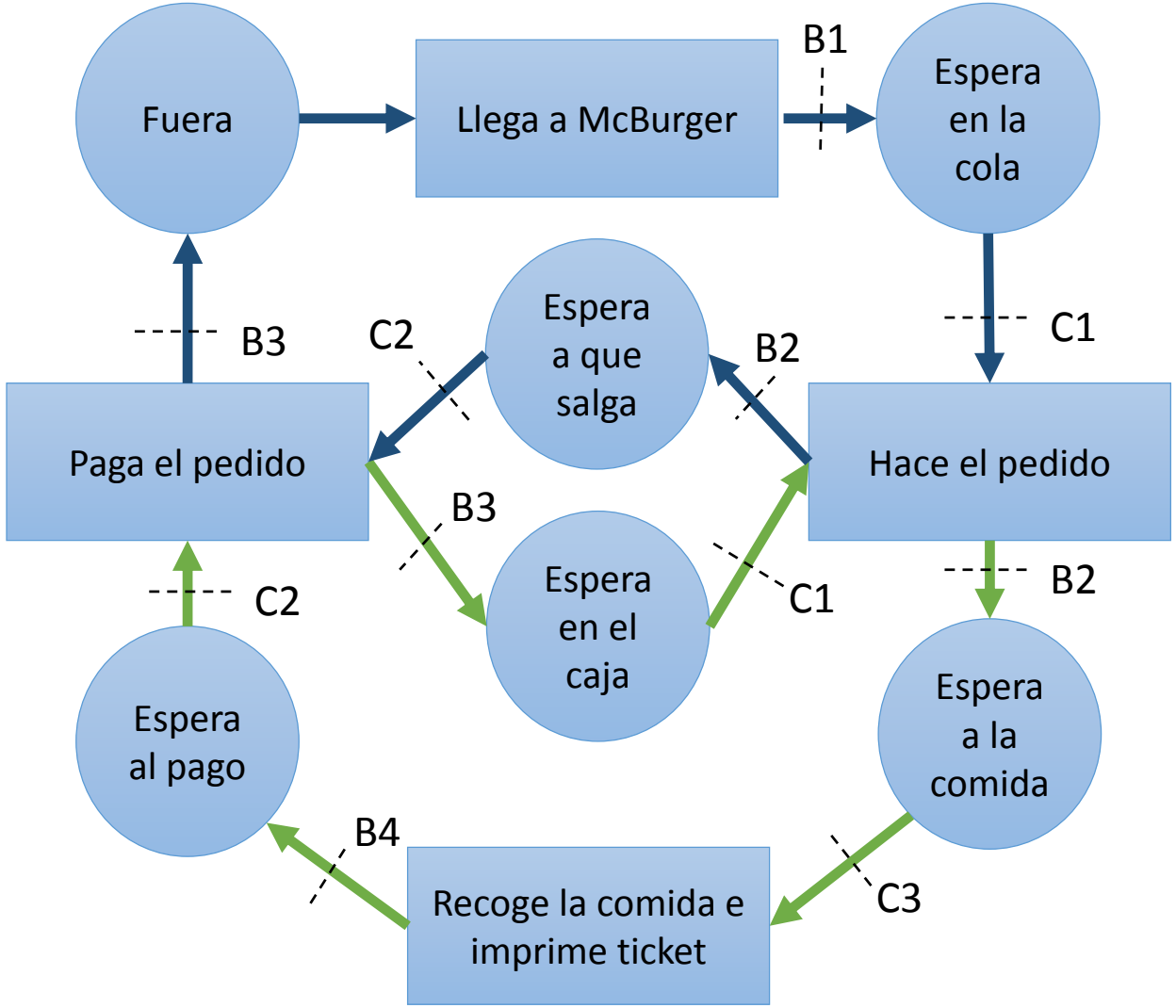
- Tres fases:
  - **Fase α**: Sacar el siguiente evento a procesas, mover el reloj de la simulación hasta ese instante de tiempo. Pasar a todas las entidades que están implicadas en el evento B en ese instante de tiempo a una lista de "*Vencimiento*".
  - **Fase β**: Ejecuta las rutinas de actividad de las entidades en la lista de "*Vencimiento*".
  - **Fase γ**: Se evalúan todos los eventos C en secuencia para verificar si la condición se cumple y se pueden ejecutar sus rutinas.



Información para cada Entidad

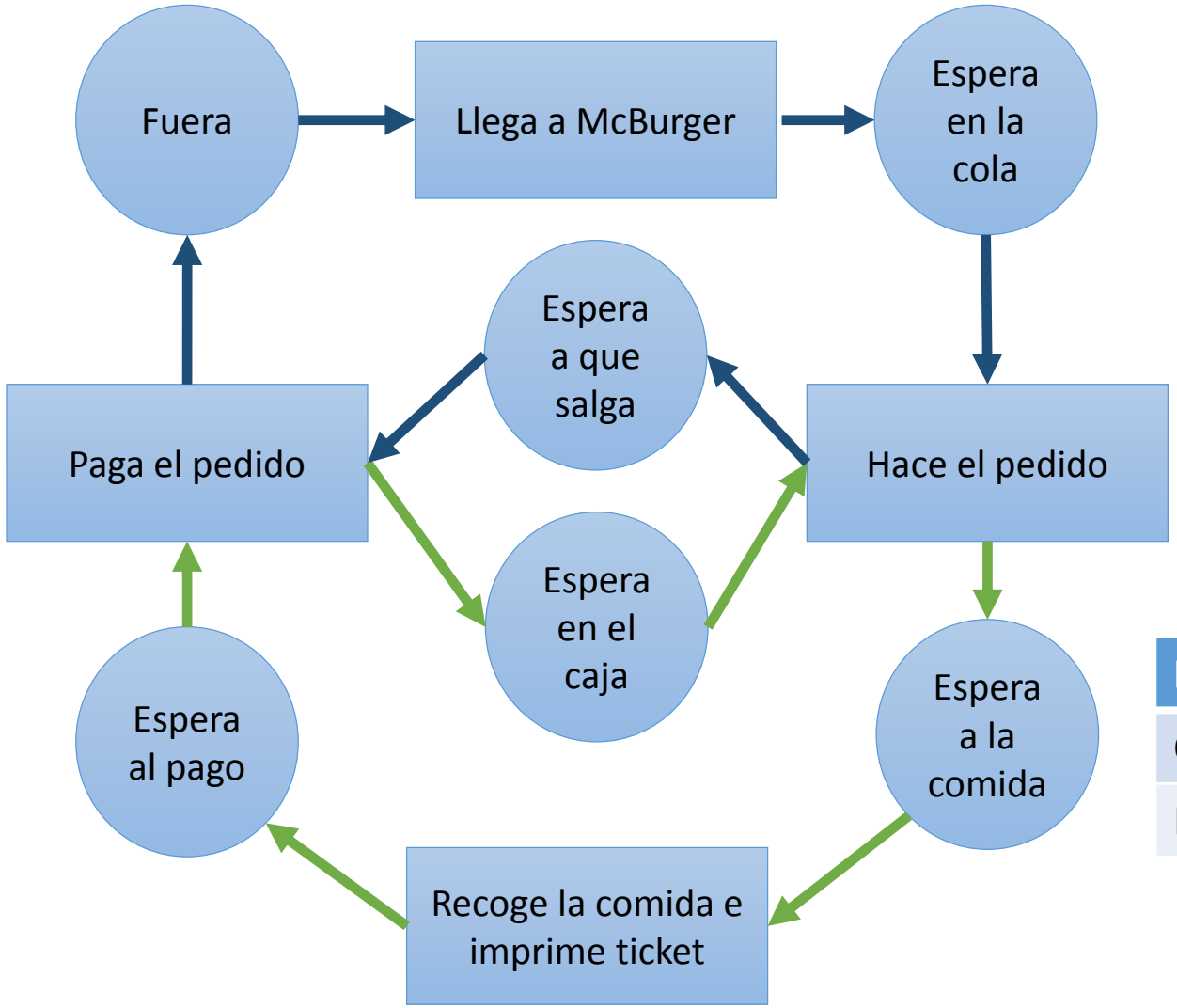
- **Disponibilidad**: Determina si la entidad está pendiente de un evento B:
  - Si es VERDADERO:
    - La entidad está disponible porque está esperando a que ocurra un evento C.
  - Si es FALSO:
    - **Siguiente activación**: Momento en el cual la entidad cambiará de estado debido a que está a la espera de la ejecución de un evento B.
    - **Actividad**: Siguiente evento B al cual está esperando.

Modelo de Tres Fases (Visto Antes)



- Eventos B:
  - B1: llega a McBurger.
  - B2: Termina de hacer el pedido.
  - B3: Termina de pagar el pedido.
  - B4: Termina de recoger la comida.
- Eventos C :
  - C1: Empieza a hacer el pedido.
  - C2: Empieza a pagar.
  - C3: Empieza a recoger la comida.

Modelo de Tres Fases



- Inicialización:
  - El dependiente espera en la caja.
  - El primer cliente llega en t=4.
  - La cola está vacía.
- Estado:
  - Reloj = 0
  - Cola = 0
  - Clientes = 0
  - Vencimiento = ∅

Entidad	Disponible	Siguiente	Actividad
Clientes	FALSO	4	Llega McBurger
Dependiente	VERDADERO	--	--

Modelo de Tres Fases

- Primer fase α:
  - El primer evento es la llegada de cliente.
  - Sólo la entidad clientes pasa a vencimiento.
- Estado:
  - Reloj = 4
  - Cola = 0
  - Clientes = 0
  - Vencimiento = cli

Entidad	Disponible	Siguiente	Actividad
Clientes	FALSO	4	Llega McBurger
Dependiente	VERDADERO	--	--

- Primer fase β:
  - En teoría la persona llega y se encola (en la cola vacía) antes de ser atendido.
  - Se puede programar cuán llega el siguiente cliente (t=+5)
- Estado:
  - Reloj = 4
  - Cola = 1
  - Clientes = 1
  - Vencimiento = $\varnothing$

Entidad	Disponible	Siguiente	Actividad
Clientes	FALSO	9	Llega McBurger
Dependiente	VERDADERO	--	--

Modelo de Tres Fases

- Primer fase γ:
  - Se comprueba si el evento C se puede ejecutar (cola>0 Y Dependiente esperando).
  - Se añade el tiempo de servicio (t+=2).
- Estado:
  - Reloj = 4
  - Cola = 0
  - Clientes = 1
  - Vencimiento = $\varnothing$

Entidad	Disponible	Siguiente	Actividad
Clientes	FALSO	9	Llega McBurger
Dependiente	FALSO	6	Terminar pedido

- Segunda fase α:
  - Se procesa la terminación del pedido.
  - Se queda a la espera de que salga la comida (evento C)
- Estado:
  - Reloj = 6
  - Cola = 0
  - Clientes = 1
  - Vencimiento =dep

Entidad	Disponible	Siguiente	Actividad
Clientes	FALSO	9	Llega McBurger
Dependiente	FALSO	6	Terminar pedido

Modelo de Tres Fases

- Segunda fase β:
  - Se ejecuta la lista de vencimiento y el dependiente pasa a estar esperando por la comida.

- Estado:
  - Reloj = 6
  - Cola = 0
  - Clientes = 1
  - Vencimiento = $\varnothing$

Entidad	Disponible	Siguiente	Actividad
Clientes	FALSO	9	Llega McBurger
Dependiente	VERDADERO	--	--

- Segunda fase γ:
  - No hay ninguna condición de evento C que se desbloquee ahora.

- Estado:
  - Reloj = 6
  - Cola = 0
  - Clientes = 1
  - Vencimiento = $\varnothing$

Entidad	Disponible	Siguiente	Actividad
Clientes	FALSO	9	Llega McBurger
Dependiente	VERDADERO	--	--

Conceptos

- **Contadores de estadísticas**: Acumuladores de valores orientados a reportar el comportamiento del modelo:
  - Tiempos de espera agregados y promedios en recursos (en colas de espera usualmente).
  - Número medio de elementos en las colas de espera (dentro del sistema).
  - Comparativa en tiempos de espera por recursos.
  - Aprovechamiento esperado: Relación entre el tiempo que los recursos están en uso y el tiempo en los que están ociosos.

Hay una diferencia en el tipo de estadísticas obtenidas en la **simulación de eventos discretos** frente a la **simulación de sistemas continuo**.

Simulación de Eventos Discretos

Teoría de Colas

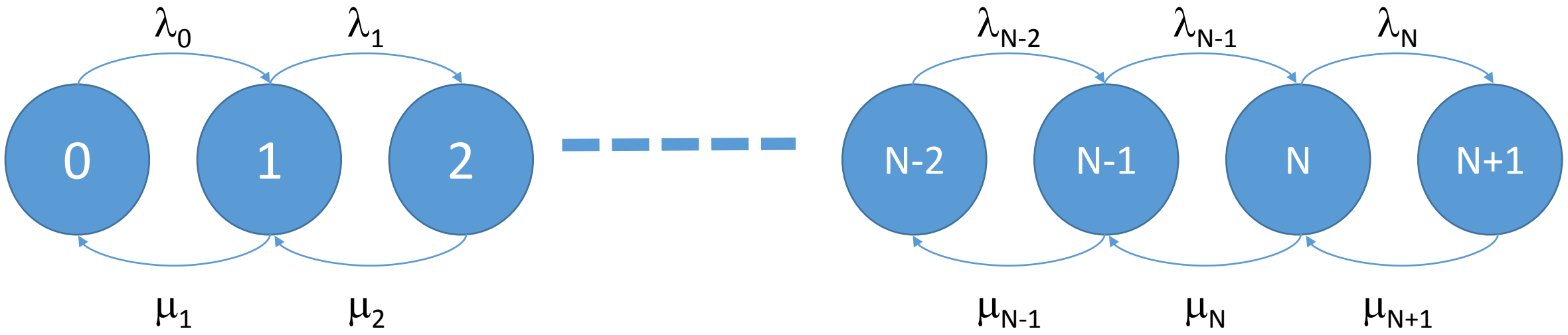
Teoría de Colas

- Rama de la estadística asociada a los procesos estocásticos de colas de espera y tiempos de servicio.
- Tipologías según:
  - Fuente de datos (finita o infinita).
  - Procesos de llegada.
  - Distribución de los tiempos de servicio.
  - Capacidad máxima de las colas de espera.
  - Número de servidores.
  - Política de ordenación de las colas.

Teoría de Colas

- Parámetros fundamentales de una cola:
  - Tiempo de servicio: μ
  - Ratio de llegadas: λ
- Parámetros derivados:
  - Intensidad de tráfico: λ/μ
  - Utilización del servicio.
  - Probabilidad de que *N* clientes estén en el sistema en el instante de tipo *t*.

Teoría de Colas



En su forma más sencilla se trata de un sistema con un ratio de entrada y un ratio de salida que encuentra el equilibrio si están compensados.

O en el caso de que existan limitaciones por encima o por debajo.

Teoría de Colas

- Relaciones entre parámetros:
  - Tiempo medio de espera en el sistema: $W = W_q + 1/\mu$
  - Tiempo medio de espera en la cola: W_q
  - Número medio de clientes en el sistema: $L = \lambda W$
  - Número medio de clientes en la cola: $L_q = \lambda W_q$

- Los cuatro elementos (L, L_q, W, W_q) están relacionados y se pueden determinar si se resuelve uno de ellos.

Teoría de Colas

- Calculo de probabilidades:
  - Suposición: Ratio de entrada = Ratio de salida

Estado	Entrada		Salida
0	$\mu_1 P_1$	=	$\lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$	=	$(\lambda_1 + \mu_1) P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3$	=	$(\lambda_2 + \mu_2) P_2$
…	……		
N-1	$\lambda_{N-2} P_{N-1} + \mu_N P_N$	=	$(\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}) P_{N-1}$
N	$\lambda_{N-1} P_{N-1} + \mu_{N+1} P_{N+1}$	=	$(\lambda_N + \mu_N) P_N$
…	……		

Teoría de Colas

- Calculo de probabilidades:
  - Relación entra las probabilidades de estar en cada estado:

Estado	Entrada		Salida
0	P_1	=	$(\lambda_0/\mu_1)\ P_0$
1	P_2	=	$(\lambda_1 P_1 + \mu_1\ P_1 - \lambda_0\ P_0)\ /\ \mu_2$
		=	$(\lambda_1/\mu_2)\ P_1 + (\mu_1\ P_1 - \lambda_0\ P_0)\ /\ \mu_2$
		=	$(\lambda_1/\mu_2)\ P_1 + (\mu_1\ P_1 - \mu_1\ P_1)\ /\ \mu_2$
		=	$(\lambda_1/\mu_2)\ P_1$
		=	$((\lambda_0\lambda_1)\ /\ (\mu_1\ \mu_2))\ P_0$

Teoría de Colas

- Calculo de probabilidades:
  - Relación entra las probabilidades de estar en cada estado:

Estado	Entrada		Salida
N-1	P_N	=	$(\lambda_{N-1}P_{N-1} + \mu_{N-1} P_{N-1} - \lambda_{N-1} P_{N-2}) / \mu_N$
		=	$(\lambda_{N-1}/\mu_N) P_{N-1} + (\mu_{N-1} P_{N-1} - \lambda_{N-2} P_{N-2}) / \mu_N$
		=	$(\lambda_{N-1}/\mu_N) P_{N-1} + (\mu_{N-1} P_{N-1} - \mu_{N-1} P_{N-1}) / \mu_N$
		=	$(\lambda_{N-1}/\mu_N) P_{N-1}$
		=	$((\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{N-1}) / (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N)) P_0$

En general: $P_i = C_i P_0$, siendo $C_i = ((\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}) / (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i))$

Teoría de Colas M/M/1

© Wikipedia

Sistema de colas con un único servidor con ratio de llegada de Poisson y con tiempos de servicio exponencial.

- Parámetros:
  - $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$ (Ratio de llegada es la misma distribución).
  - $\mu_i = \mu_j = \mu$ (Tiempo de servicio es la misma distribución).
  - $\rho = \lambda/\mu$ (Debe ser <1 para ser estacionario).
  - $C_i = (\lambda/\mu)^i = \rho^i$
- Si asumimos que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$$

$$\Rightarrow \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i\right) P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i\right)} = \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i\right)} \overset{\rho^0 = 1}{=} \frac{1}{\left(\rho^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i\right)}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i\right)} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i\right)^{-1} \overset{☆}{=} \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1 - \rho$$

☆

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x}$$

Para todo x

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1 - x}$$

Si $|x|<1$

Teoría de Colas M/M/1

- La probabilidad de que haya *i* elementos en la cola es:
  - $P_i = (1-\rho)\,\rho^i$

Número medio de clientes en el sistema: $L = \sum_{i=0}^{\infty} i\,(1-\rho)\rho^i$ ⇒ $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

$$L = (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty} i\,\rho^i = (1-\rho)\,\rho\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^i = (1-\rho)\,\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i = (1-\rho)\,\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{1-\rho} = (1-\rho)\,\rho\frac{1}{(1-\rho)^2}$$

Media de una distribución geométrica que comienza en 0 ($Geom_0(\rho)$)

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \underbrace{\rho}_{\text{Clientes en el servicio}} + \underbrace{\frac{\rho^2}{1-\rho}}_{\text{Clientes en la cola } L_q}$$

Teoría de Colas M/M/1 (Resumen)

Número medio de los elementos : En el sistema $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ En la cola: $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

Probabilidad de que haya *n* o más elementos esperando en la cola: $P\{N \geq n\} = \sum_{i=n}^{\infty} P_i = (1-\rho) \sum_{i=n}^{\infty} \rho^i = \rho^n$

Espera media de los elementos: En el sistema $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda\,(1-\rho)} = \frac{\mu}{1-\rho} = \frac{E[s]}{1-\rho}$

En la cola: $W_q = \frac{\rho\, E[s]}{1-\rho}$

Percentil *n*-esimo de tiempo de espera en la cola: $\pi_q(n) = W\, ln\big((100-n)\,\rho\big)$

Ejemplo Cola M/M/1

- Un dispositivo de conmutación de mensajes recibe datos a transmitir en un ratio de 240 mensajes por minuto. La línea de transmisión es de 800 caracteres por segundo. La longitud media del mensaje sigue una distribución exponencial con una longitud media de 176 caracteres. Considere que el tamaño del buffer de mensajes es suficientemente grande.
  1. ¿Número medio de mensajes en el sistema?
  2. ¿Número medio de mensajes en la cola esperando a ser transmitidos?
  3. ¿Tiempo medio de espera de un mensaje en el sistema?
  4. ¿Tiempo medio de espera en la cola?
  5. ¿Probabilidad de que haya 11 o más mensajes esperando a ser transmitidos?
  6. ¿Cuál es el percentil 90 de tiempo de espera en la cola?

Teoría de Colas: Notación de Kendall

A/S/c/K/N/D

M/M/1

A: Distribución de llegadas.
S: Distribución del tiempo de servicio.
c: Número de servidores.

K: Tamaño máximo de elementos en el sistema.
N: Tamaño de la población de elementos.
D: Política de ordenación de la cola.

Símbolo	Nombre	Descripción para A	Descripción para S
M	Markoviano sin memoria	Proceso de llegadas de Poisson o aletorio.	Tiempo de servicio exponencial.
M^x	Markoviano por lotes	Llegadas de Poisson en el que el número de elementos por llegada depende de la variable aleatoria *X*.	Tiempo de servicio exponencial en el que el número de elementos servidos depende de la variable aleatoria *X*.
MMPP	Procesos de Poisson modulados por una cadena de Markov	Proceso de Poisson en el que las llegadas vienen en ráfagas.	Tiempo de servicio exponencial en el que el ratio lo controla una cadena de Markov.
D	Distribuciones degeneradas	Tiempo entre llegadas fijo o determinista.	Tiempo de servicio fijo o determinista.
E_k	Distribución de Erlang	Distribución de Erlang con parámetro *k* de forma.	Distribución de Erlang con parámetro *k* de forma.
G	Distribución general.	Distribución genérica de llegadas independientes.	Distribución genérica de tiempos de servicio.

Símbolo	Nombre	Descripción para D
FIFO FCFS	First In First Out/First Come First Served	Los elementos se atienden en orden de llegada.
LIFO LCFS	Last in First Out/Last Come First Served	Los elementos se atienden en orden inverso al de llegada.
SIRO	Service In Random Order	Los elementos se atienden en orden aleatorio.
PNPN	Priority service	Servicios con prioridades (expulsivas y no expulsivas)
PS	Processor Sharing	Compartición del servicio aumentando el tiempo de servicio.

Teoría de Colas

- Ejemplos:
  - M/M/2: Un taller con dos mecánicos arreglando coches.
  - M/M/1/N: Una peluquería en la que hay sitio para máximo 2 personas esperando.
  - M/G/1: Comparar el rendimiento de dos operarios cada uno con un tiempo medio de servicio *s* y una desviación típica sobre ese tiempo σ.
  - $M/E_k/1$: Pacientes que llegan a un servicio clínico que consisten de *k* pruebas diferentes cada una con un tiempo de servicio exponencial.
  - M/D/1: El proceso de revisión que un mecánico hace a un aeronave. Los aviones llegan con una Poisson, pero siempre se tarda *t* unidades de tiempo en el servicio.
  - $M/G/\infty$: Diseño de un servicio on-line para un ratio de clientes por minuto en el cual se quiera dimensionar el número de servidores para que no haya esperas superiores a un valor dado.
  - M/M/s/K/K: *s* operarios responsables de *K* máquinas para su funcionamiento.

Teoría de Colas

- Existen técnicas analíticas exactas para:
  - M/M/s
  - $M/E_k/1$
  - M/D/1 (caso especial de M/G/1)
  - MMPP/M/1 (para una serie restringida de casos).
- El análisis es más complicado en los modelos:
  - G/M/1
  - M/G/1
  - G/G/1
- Para cualquier cosa más complicada → ¡Hay que simular!

Referencias

- Paul, R.J. (1993). Activity Cycle Diagrams and the Three Phase Method. In: Proceedings of the 1993 Winter Simulation Conference, Los Angeles, California, United States
- Pidd, M. (1998). Computer Simulation in Management Science. John Wiley & Sons: Chichester, UK
- Robinson, S (2004). Simulation: The Practice of Model Development and Use. John Wiley & Sons: Chichester, UK
- Ewald, R., Maus, C., Rolfs, A., & Uhrmacher, A. (2007). Discrete event modelling and simulation in systems biology. Journal of Simulation, 1(2), 81-96.

Modelización de Sistemas Biológicos

Simulación de Eventos Discretos

POLITÉCNICA